Μάθημα 13ο

• Ευστάθεια και γραμμικοποίηση συστημάτων

Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα στη γενική του μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

● και έστω ότι υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο τέτοιο ώστε: (x_0,y_0): $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$

Θα χρειαστούμε τις συναρτήσεις f, g διαφορίσιμες και με συνεχή παράγωγο σε μία γειτονία του (x_0,y_0).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε

● $(x_0,y_0) = (0,0)$. Γιατί?

Αν $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, θέτω $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$

ώστε $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \overset{\substack{x = u + x_0 \\ y = v + y_0}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dot{u} = \tilde{f}(u,v) \\ \dot{v} = \tilde{g}(u,v) \end{cases}$ με κρίσιμο

σημείο $(u_0,v_0) = (0,0)$

Βρίσκουμε στη γειτονιά του κρίσιμου σημείου και από το Θεώρημα Taylor αναπτύσσω τις f, g γύρω από το κρίσιμο σημείο:

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot v + r_1$$

Αντίστοιχα για την g:

$$g(x_0+u, y_0+v) = g(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} u + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} v + r_2$$

Οι συναρτήσεις r_1, r_2 είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα του θεωρήματος με απαίτηση

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

Κρατώντας μόνο τους πρώτους όρους της σειράς σε μία περιοχή γύρω από το (x_0, y_0) μπορούμε να γράψουμε το σύστημα ως

$$\frac{du}{dt} = f_x(x_0,y_0)u + g_x(x_0,y_0)v$$

$$\frac{dv}{dt} = f_y(x_0,y_0)u + g_y(x_0,y_0)v$$

όπου θεωρούμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα r_1, r_2 αμελητέα.

Διόρθωση

$$J=\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

Οπότε καταλήγουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = J(x_0,y_0)\vec{u}}$$, όπου $\vec{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ και J ο Ιακωβιανός πίνακας.

Παράδειγμα

Να γραμμικοποιηθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = y + y^2 - 3xy \end{cases}$$
στα κρίσιμα σημεία

Λύση

- Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 3x - x^2 - xy = 0 \\ y + y^2 - 3xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(3-x-y)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3-x-y=0 \end{cases} \\ y(1+y-3x)=0 \end{cases}$$

$$y(1+y-3x)=0 \overset{x=0}{\Longrightarrow} y(1+y)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα δύο κρίσιμα σημεία είναι $(0,0)$, $(0,-1)$

$$y(1+y-3x)=0 \overset{x=3-y}{\Longrightarrow} y(1+y-9+3y)=0 \Rightarrow$$

$$y(4y-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Άρα δύο κρίσιμα σημεία είναι: $(3,0)$, $(1,2)$

(Λύνουμε την πιο εύκολη εξίσωση πρώτα και μετά αντικαθιστούμε στη δεύτερη)

• Βρίσκω την Ιακωβιανή:

$$J^T = \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}^T \Rightarrow J^T = \begin{pmatrix} 3-2x-y & -3y \\ -x & 1+2y-3x \end{pmatrix}^T$$

• Υπολογίζω την Ιακωβιανή στα κρίσιμα σημεία:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad J(3,0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}^T$$

$$J(0,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T \qquad J(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Για κάθε κρίσιμο σημείο που βρήκαμε χαρακτηρίζουμε το σύστημα γύρω από αυτό το σημείο βάσει του Ιακωβιανού πίνακα. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην εύρεση των κρίσιμων σημείων (Πρώτα λύνω τη μία εξίσωση και μετά αντικαθιστώ στη δεύτερη). Η διαδικασία της μελέτης της ευστάθειας των κρίσιμων σημείων εξαρτάται μόνο από τον Ιακωβιανό πίνακα.

• <u>Κρίσιμα σημεία γραμμικών συστημάτων</u>

Εξετάζουμε το $(0,0)$ ως κρίσιμο σημείο του συστήματος: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Το σύστημα είναι γραμμικό και με σταθερούς συντελεστές. Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \dot{\vec{u}} = A\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Η γενική λύση του συστήματος περιλαμβάνει τη συνάρτηση e^{At}, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ και για βρεί την e^{At}, χρειαζόμαστε τις ιδιοτιμές του A.

Αν λ_1, λ_2 ιδιοτιμές, ώστε $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

γράφουμε του $\boxed{A = PDP^{-1}}$, όπου $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$P = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$, $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ ιδιοδιανύσματα του A.

Τότε είναι εύκολο να δείξετε ότι ισχύει

$$e^{A} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Η ευστάθεια των κρίσιμων σημείων εξαρτάται από τη λύση των ιδιοτιμών, οι οποίες μπορεί να είναι:

1) Πραγματικές, διακριτές και με το ίδιο πρόσημο

2) Πραγματικές, διακριτές και με διαφορετικό πρόσημο

3) Πραγματικές και ίσες.

4) Μιγαδικές

5) Αυστηρά φανταστικές

<u>1) Πραγματικές, διακριτές και με το ίδιο πρόσημο ιδιοτιμές</u>

Η λύση του συστήματος σε αυτή την περίπτωση γράφεται ως: $\vec{x}(t)=\vec{c}_1 e^{\lambda_1 t}+\vec{c}_2 e^{\lambda_2 t}$

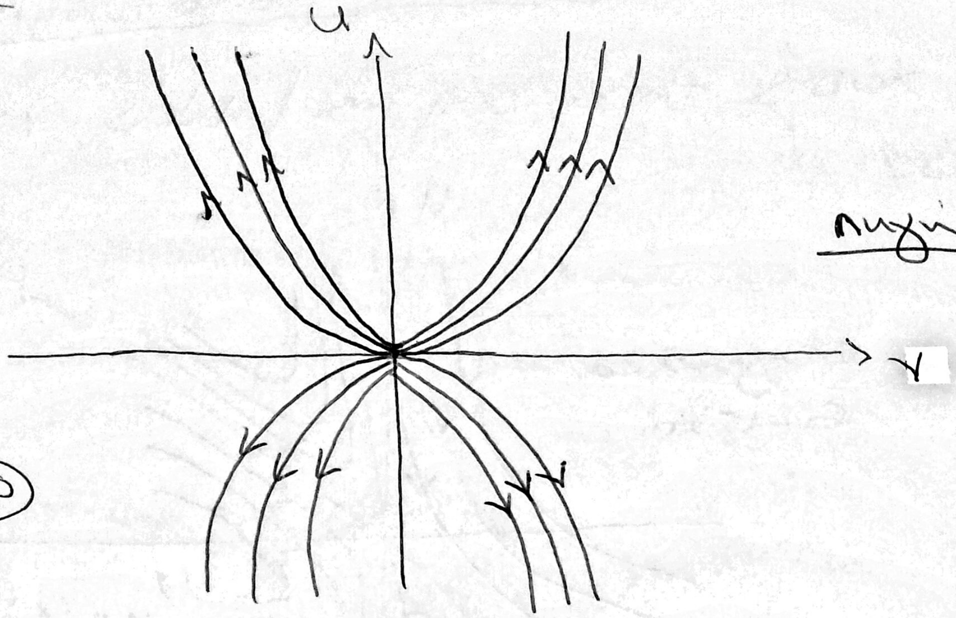
$$\Rightarrow \begin{cases} u(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t} \\ v(t)=c_3 e^{\lambda_1 t}+c_4 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Μία από αυτές τις τροχιές στο φασικό χώρο (u,v) θα είναι $\begin{cases} u=u_0 e^{\lambda_1 t} \\ v=v_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} v=v_0 e^{\lambda_2 t}=v_0 (e^t)^{\lambda_2} \\ u=u_0 (e^t)^{\lambda_1} \Rightarrow \left(\dfrac{u}{u_0}\right)^{1/\lambda_1}=e^t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v=C u^{k}} \text{ όπου } k=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2>0,\ \lambda_1\neq\lambda_2$

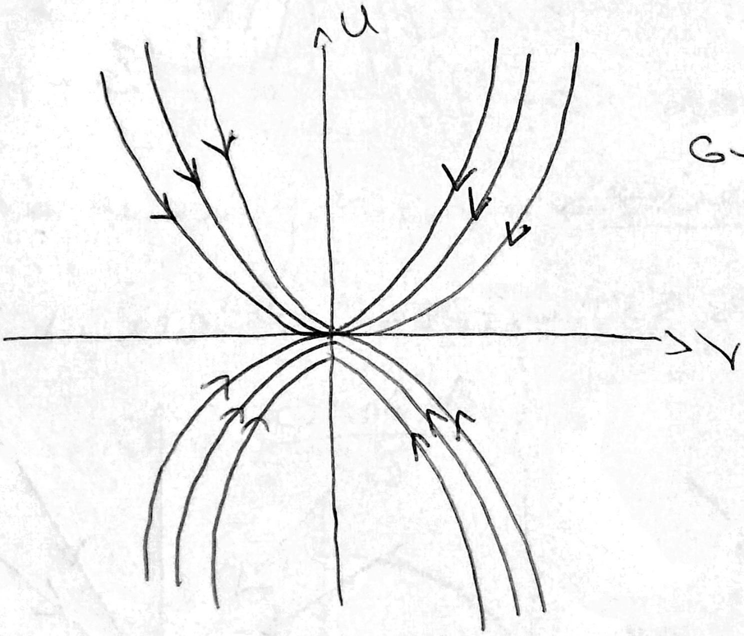
$1/k>1$:



πηγή

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



σημείο συσσώρευσης

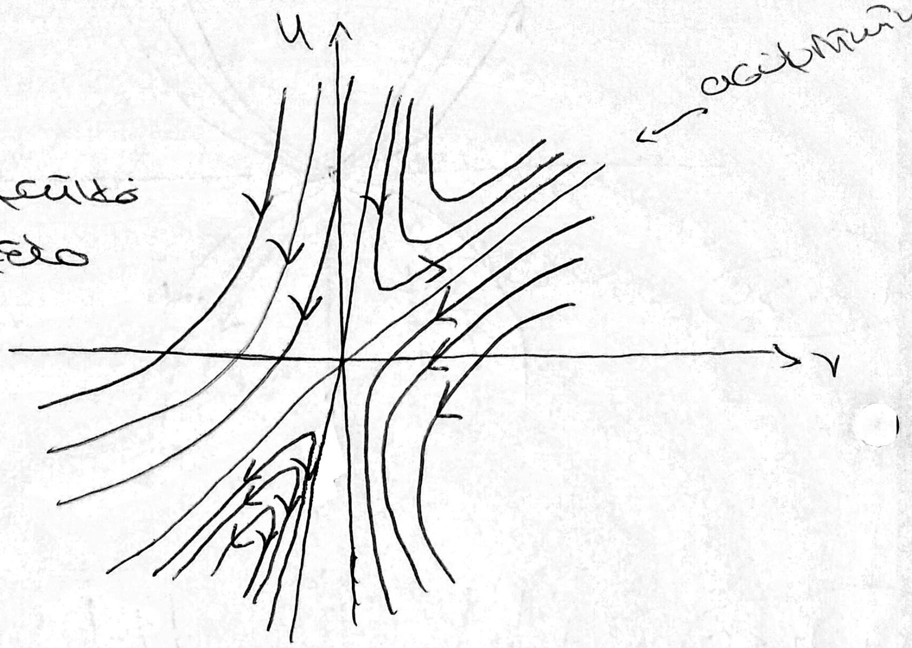
Άσκηση

Να γίνει η περίπτωση $2/k<1$

2) Πραγματικές, διακριτές με αντίθετο πρόσημο ιδιοτιμές

Ο φασικός χώρος είναι πάλι της μορφής $v = cu^k$,
$k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

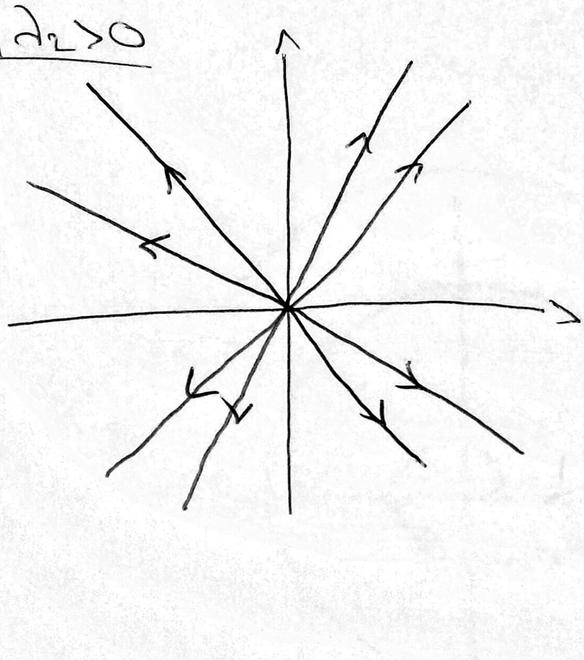
$v = \frac{c}{u^{|k|}}$ σαγματικό σημείο



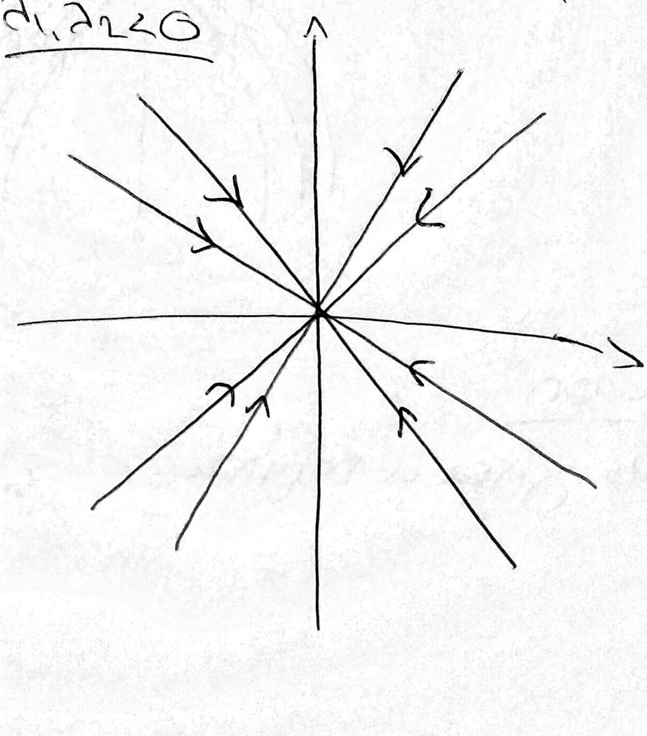
3) Πραγματικές και ίσες

Ο φασικός χώρος είναι $v = cu^k = cu$, $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



4) Μιγαδικές Ιδιοτιμές

Αν οι ιδιοτιμές είναι της μορφής: $\lambda_1 = p + iq$

$\lambda_2 = p - iq$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$\vec{v} = \vec{a} + i\vec{b}$, $\vec{v}^{*} = \vec{a} - i\vec{b}$, (όπου $\vec{v}^{*}$ ο συζυγής)

Η γενική λύση της εξίσωσης γράφεται:

$$\vec{x}(t) = e^{pt}\left[\vec{a}\cos(qt) - \vec{b}\sin(qt)\right]$$

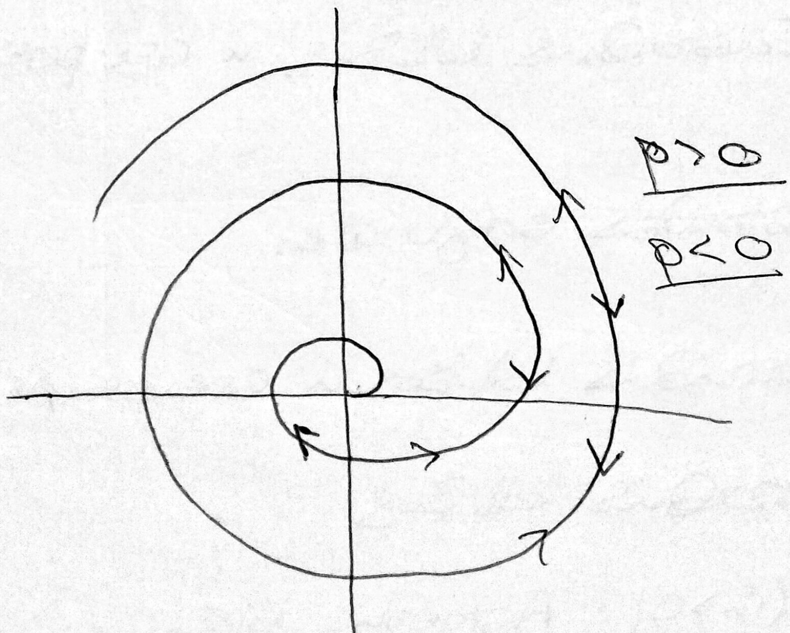
ή

$$\vec{x}(t) = e^{pt}\left[\vec{b}\cos(qt) + \vec{a}\sin(qt)\right], \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Στο φασικό χώρο η λύση αντιστοιχεί σε σπειροειδές

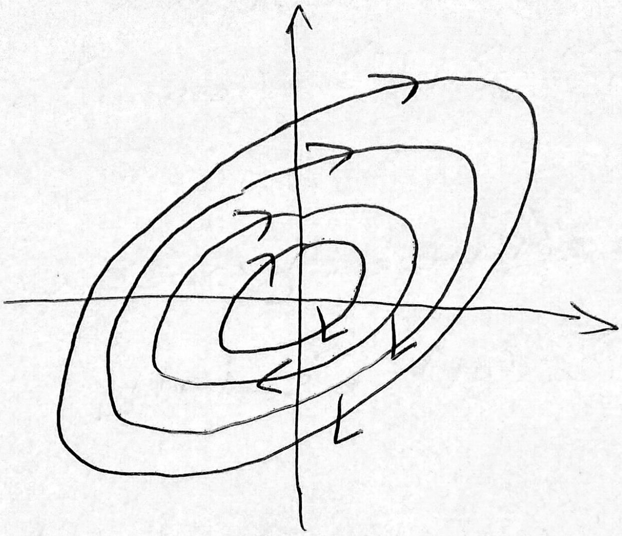
αν $p<0$, σημείο συσσώρευσης

αν $p>0$, είναι πηγή



5) Θεωρητικές Ιδιότητες

$p=0$: $\vec{x} = \vec{a}\cos(qt) - \vec{b}\sin(qt)$ που αντιστοιχούν σε ελλείψεις.



Συνοπτικά:

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Ευσταθής κόμβος
- $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: Ευσταθής κόμβος ή σπειροειδής
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: Ασταθές σαγματικό
- $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: Ασταθής κόμβος ή σπειροειδές
- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$: Ασταθής κόμβος
- $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $(a>0)$: Ασταθής σπειροειδές

- $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib \ (a<0)$: ευσταθείς σπειροειδές

- $\lambda_1, \lambda_2 = \pm ib$: κέντρο ταλάντωσης ή σπειροειδές.